

//

- Sichtbar bearbeitet wurden die Aufgaben 1 bis 6; die Aufgaben 7 und 8 sind nicht als Lösung sichtbar bearbeitet.
- Die Aufgaben 1, 2, 3, 4 und 6a enthalten richtige zentrale Ideen und teils korrekte Endergebnisse.
- Bei Aufgabe 5 ist der Rechenansatz zum Kern sinnvoll, aber die ausgewählte Antwort ist nicht die zur eigenen Parameterdarstellung passende Basis.
- Bei Aufgabe 6b/6c fehlen das Endresultat der neuen Darstellungsmatrix und die geometrische Interpretation.

Aufgaben 1–5 (Multiple Choice)

Aufgabe 1 – Kern, Bild und Dimensionsformel

✓ korrekt

Du wählst die Antworten (a) und (c), was mit der Musterlösung übereinstimmt. Die Begründung ist knapp, aber die entscheidende Idee ist sichtbar: Wenn $Ax = 0$ nur die triviale Lösung besitzt, ist der Kern null-dimensional. Zusammen mit der Dimensionsformel folgt dann $\dim(\operatorname{im} A) = n$. Für eine noch klarere Begründung solltest du die Dimensionsformel explizit als $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = n$ notieren.

Aufgabe 2 – Determinante bei Basiswechsel

✓ korrekt

Du wählst «Richtig», was korrekt ist. Die zugrunde liegende Idee ist, dass zwei Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung bezüglich verschiedener Basen ähnlich sind. Damit gilt $B = TAT^{-1}$ und folglich $\det(B) = \det(A)$. Die sichtbare Begründung ist sehr knapp, aber fachlich in die richtige Richtung.

Aufgabe 3 – Koordinatenwechsel zur Standardbasis

✓ korrekt

Du verwendest die gegebenen Koordinaten $(-1, -1)$ als Koeffizienten der beiden Basisvektoren und berechnest daraus den Vektor $(2, 0)^T$. Die Antwort (d) ist daher korrekt. Positiv ist auch, dass du die Linearkombination sichtbar aufschreibst und zusätzlich eine Skizze zur Orientierung ergänzt.

Aufgabe 4 – Bild einer Matrix bestimmen

✓ korrekt

Du bringst die Matrix mit Zeilenumformungen auf eine Stufenform und erkennst, dass das Bild zweidimensional ist. Die ausgewählte Antwort (e) ist korrekt, da die ersten beiden Spalten der Ausgangsmatrix eine Basis des Bildes bilden. Wichtig ist hier: Für das Bild nimmt man die Pivotspalten der ursprünglichen Matrix, nicht einfach die Spalten der Zeilenstufenform. Diese Idee ist in deiner Lösung erkennbar.

Aufgabe 5 – Basis des Kerns bestimmen

≈ teilweise korrekt

Du stellst ein homogenes Gleichungssystem auf und führst eine Parameterdarstellung mit freien Variablen $x_3 = t$ und $x_4 = s$ ein. Der Ansatz zur Bestimmung des Kerns ist damit sinnvoll. Deine Parameterform führt jedoch auf Vektoren der Form $(t, -t - 2s, t, s)^T$, also auf die Basisvektoren $(1, -1, 1, 0)^T$ und $(0, -2, 0, 1)^T$ (oder äquivalent auf die in der Musterlösung angegebene Basis in Antwort (a)). Du markierst aber Antwort (d), und diese enthält keinen korrekten Basisvektorsatz des Kerns.

Fehleranalyse: Der Hauptfehler liegt im Abgleich zwischen deiner eigenen Parameterdarstellung und den Multiple-Choice-Antworten. Eine Kernbasis entsteht, indem du die freien Parameter einzeln setzt, zum Beispiel $t = 1, s = 0$ und $t = 0, s = 1$, und die daraus entstehenden Lösungsvektoren verwendest:

$$t = 1, s = 0 : (1, -1, 1, 0)^T; \quad t = 0, s = 1 : (0, -2, 0, 1)^T.$$

Aufgabe 6 – Basiswechsel und Darstellungsmatrix

Aufgabe 6a – Übergangsmatrix von B nach B'

✓ korrekt

Du bestimmst die Koordinaten der Standardbasisvektoren bezüglich der neuen Basis B' . Daraus erhältst du die Übergangsmatrix T . Das sichtbare Endresultat stimmt mit der Musterlösung überein. Dein Vorgehen ist zwar rechnerisch etwas lang, aber mathematisch korrekt und nachvollziehbar.

Aufgabe 6b – Darstellungsmatrix in den neuen Koordinaten

≈ teilweise korrekt

Du erkennst, dass die neue Darstellungsmatrix mit einem Basiswechsel berechnet werden muss, und setzt sinngemäss die Matrix T zusammen mit der gegebenen Matrix A ein. Der entscheidende Endschrift ist aber nicht sichtbar abgeschlossen: In der Musterlösung ergibt sich die Diagonalmatrix $\text{diag}(-1, -1, 0)$. Da dieses Endresultat nicht berechnet oder angegeben wird, bleibt die Aufgabe unvollständig.

Fehleranalyse: Der Ansatz ist richtig, aber die Multiplikation wird nicht bis zum Ergebnis geführt. Schreibe die Produktformel $B = TAT^{-1} = TAS$ vollständig aus und kontrolliere am Ende, ob die erhaltene Matrix zur Interpretation passt.

Aufgabe 6c – Geometrische Interpretation der Abbildung

— nicht sichtbar

Bei 6c ist nur ein Fragezeichen sichtbar. Eine mathematisch identifizierbare Interpretation der Abbildung ist nicht vorhanden. Die Musterlösung beschreibt die Abbildung als Projektion entlang des dritten neuen Basisvektors auf die von den ersten beiden neuen Basisvektoren aufgespannte Ebene, gefolgt von einer Punktspiegelung am Nullpunkt.

Fehleranalyse: Die geometrische Interpretation hängt direkt vom Ergebnis aus 6b ab. Wenn dort die Matrix $\text{diag}(-1, -1, 0)$ steht, sieht man: der erste und zweite neue Basisvektor werden mit -1 multipliziert, der dritte wird auf 0 abgebildet. Genau daraus folgt die Projektion mit anschliessender Spiegelung.

Aufgaben 7 und 8

Aufgabe 7 – Fredholm-Alternative

— nicht sichtbar

Die Aufgabenstellung ist sichtbar, aber es ist keine zugehörige Lösung erkennbar. Es fehlen die Bestimmung des Kerns von A^T , die Orthogonalitätsprüfung mit b_1 und b_2 sowie die Schlussfolgerung zur Lösbarkeit. Daher kann diese Aufgabe nicht als bearbeitet bewertet werden.

Aufgabe 8 – Projektionen und Bild des vierdimensionalen Würfels

— nicht sichtbar

Die Aufgabenstellung ist sichtbar, aber keine Lösung zu 8a, 8b oder 8c. Es fehlen die Matrizen von P_1 , P_2 und E , die zusammengesetzten Abbildungen sowie die Skizze des Bildes der Würfelkanten. Damit ist keine mathematisch bewertbare Bearbeitung vorhanden.

//

Du hast die ersten Aufgaben der Serie mit mehreren richtigen Ideen bearbeitet. Besonders positiv ist, dass du bei den Multiple-Choice-Aufgaben nicht nur ankreuzt, sondern häufig auch eine Rechnung oder Begründung notierst. Die Themen Kern, Bild und Basiswechsel sind grundsätzlich erkennbar verstanden, vor allem in den Aufgaben 1, 3, 4 und 6a. Ein wiederkehrender Punkt ist jedoch, dass Zwischenergebnisse manchmal nicht sauber bis zum endgültigen Schluss geführt werden, besonders bei Aufgabe 5 und 6b. Bei Aufgabe 5 sieht man gut, wie wichtig es ist, die eigene Parameterdarstellung anschliessend korrekt mit den Antwortmöglichkeiten zu vergleichen. Bei Aufgabe 6c, 7 und 8 fehlen zentrale Lösungsschritte oder ganze Bearbeitungen. Für die weitere Vorbereitung solltest du besonders üben, aus freien Parametern systematisch Basisvektoren zu bilden und Basiswechselrechnungen vollständig bis zur neuen Darstellungsmatrix $\text{diag}(-1, -1, 0)$ abzuschliessen. Insgesamt sind gute Ansätze vorhanden; mit vollständigerer Dokumentation und sorgfältigerem Endabgleich werden deine Lösungen deutlich stabiler.

//

- Sichtbar bearbeitet wurden die Aufgaben 6, 7 und 8.
- Die Aufgaben 6a–6c und 7 sind überwiegend vollständig und fachlich korrekt bearbeitet.
- Bei Aufgabe 8a und 8b sind die Projektionsmatrizen korrekt bestimmt.
- In Aufgabe 8c weicht die Skizze vom gesuchten Bild ab, da die zuvor berechnete Abbildung nicht vollständig verwendet wird.

Aufgabe 6 – Basiswechsel und Darstellungsmatrix

Aufgabe 6a – Übergangsmatrix bestimmen

✓ korrekt

Du bestimmst zunächst die Matrix der neuen Basisvektoren und berechnest anschliessend deren Inverse. Die erhaltene Übergangsmatrix stimmt mit der Musterlösung überein. Der Rechenweg ist nachvollziehbar und sauber dokumentiert.

Aufgabe 6b – Darstellungsmatrix in neuen Koordinaten

✓ korrekt

Du verwendest die richtige Basiswechsel-Formel und erhältst die Diagonalmatrix $\text{diag}(-1, -1, 0)$. Damit stimmt sowohl die Methode als auch das Endresultat mit der Referenzlösung überein.

Aufgabe 6c – Geometrische Interpretation

≈ teilweise korrekt

Die Beschreibung als Rotation um 180° um die z -Achse und anschliessende Projektion auf die xy -Ebene erfasst die Wirkung der Matrix in Standardkoordinaten. Die Musterlösung interpretiert die Abbildung jedoch bezüglich der neuen Basis als Projektion auf eine Ebene mit anschliessender Punktspiegelung. Deine Beschreibung ist anschaulich, begründet den Bezug zur gewählten Basis aber nicht explizit.

Aufgabe 7 – Fredholm-Alternative

Aufgabe 7 – Fredholm-Alternative

✓ korrekt

Du bestimmst den Kern von $A^\top$ korrekt und leitest die allgemeine Lösungsform her. Anschliessend prüfst du die Orthogonalitätsbedingung für b_1 und b_2 richtig. Die Schlussfolgerungen « b_1 lösbar» und « b_2 nicht lösbar» stimmen mit der Musterlösung überein.

Aufgabe 8 – Projektion des vierdimensionalen Würfels

Aufgabe 8a – Darstellungsmatrizen von P_1 , P_2 und E

✓ korrekt

Die Projektionsmatrizen und die Matrix von E wurden korrekt bestimmt. Besonders positiv ist, dass du die Projektionen geometrisch über die Richtungsvektoren herleitest und nicht nur das Endresultat notierst.

Aufgabe 8b – Zusammengesetzte Abbildungen

✓ korrekt

Die Matrix von $P_2 \circ P_1$ wurde korrekt berechnet. Auch die anschließende Multiplikation mit E erfolgt richtig. Das Endresultat stimmt mit der Musterlösung überein.

Aufgabe 8c – Bild des vierdimensionalen Würfels

× nicht korrekt

Du zeichnest als Bild lediglich das Einheitsquadrat und verwendest effektiv die Identitätsabbildung auf (x_1, x_2) . Die zuvor berechnete Abbildung φ besitzt jedoch zusätzliche Beiträge von x_3 und x_4 . Daher entsteht nicht nur das Einheitsquadrat, sondern die Projektion aller 16 Würfecken im Bildraum.

Fehleranalyse: Der Fehler entsteht beim Übergang von der berechneten Matrix φ zur geometrischen Darstellung. In der Skizze werden die Beiträge der dritten und vierten Koordinate ignoriert. Dadurch geht die eigentliche Wirkung der Abbildung verloren und das gezeichnete Bild ist zu klein.

//

Die Lösungen zu den Aufgaben 6 und 7 sind fachlich sehr solide und zeigen ein gutes Verständnis von Basiswechseln, linearen Abbildungen und der Fredholm-Alternative. Deine Rechnungen sind überwiegend nachvollziehbar und führen zu den korrekten Ergebnissen. Besonders positiv ist, dass du zentrale Zwischenschritte sichtbar dokumentierst. Der einzige wesentliche fachliche Fehler tritt in Aufgabe 8c auf. Dort wurde die zuvor korrekt berechnete Abbildung nicht konsequent für die geometrische Darstellung verwendet. Achte bei solchen Visualisierungsaufgaben darauf, dass die Skizze tatsächlich die berechnete Abbildung repräsentiert und nicht eine vereinfachte Teilabbildung. Insgesamt ist die Serie sehr gut bearbeitet und zeigt ein sicheres Verständnis der behandelten Konzepte.

//

- Sichtbar bearbeitet wurden die Aufgaben 1 bis 7; Aufgabe 8 ist nur als Aufgabenstellung sichtbar, ohne eigene Lösung.
- Die Multiple-Choice-Aufgaben 1 bis 5 sind überwiegend korrekt beantwortet und meist mit passenden Begründungen versehen.
- Bei den längeren Aufgaben 6 und 7 sind die zentralen Methoden sichtbar und führen im Wesentlichen zu den Resultaten der Musterlösung.
- Einige Begründungen sind sehr knapp oder schwer lesbar; insbesondere bei Aufgabe 5 und 7 wären klarere Parameter- und Schlussfolgerungsschritte hilfreich.

Aufgaben 1–5 (Multiple Choice)

Aufgabe 1 – Dimension von Kern und Bild

✓ korrekt

Du wählst die richtigen Aussagen: $\dim(\operatorname{im} A) = n$ und $\dim(\ker A) = 0$. Die Begründung ist passend: Der Kern ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$, und wenn nur die triviale Lösung existiert, ist der Kern nulldimensional. Die Dimensionsformel $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = n$ wird korrekt verwendet.

Aufgabe 2 – Determinante bei Basiswechsel

✓ korrekt

Du erkennst richtig, dass Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung ähnlich sind. Die Rechnung $\det(TAT^{-1}) = \det(T) \det(A) \det(T)^{-1} = \det(A)$ ist die richtige Begründung dafür, dass $\det A = \det B$ gilt. Damit ist sowohl die Antwort als auch die Begründung korrekt.

Aufgabe 3 – Koordinaten bezüglich der Standardbasis

✓ korrekt

Du verwendest die gegebenen Koordinaten als Koeffizienten der beiden Basisvektoren. Die Linearkombination $(-1) \cdot (0, 2)^T + (-1) \cdot (-2, -2)^T$ führt korrekt zu $(2, 0)^T$. Die gewählte Antwort (d) ist damit richtig.

Aufgabe 4 – Bild einer Matrix bestimmen

✓ korrekt

Der Ansatz über das Gaußverfahren ist richtig, um Pivotspalten und Rang zu bestimmen. Du erkennst, dass der Rang 2 ist und dass die ersten zwei Spalten der ursprünglichen Matrix das Bild aufspannen. Die gewählte Antwort (e) stimmt mit der Musterlösung überein. Achte weiterhin darauf, bei Bildräumen die Pivotspalten der Ausgangsmatrix zu verwenden, nicht die Spalten der Zeilenstufenform.

Aufgabe 5 – Basis des Kerns bestimmen

≈ weitgehend korrekt

Du stellst das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ auf und führst Zeilenumformungen durch. Die richtige Antwort (a) ist markiert; die beiden Vektoren bilden tatsächlich eine Basis des Kerns. Deine Notiz, dass Antwort (b) nicht möglich ist, geht in die richtige Richtung, weil der Kern hier Dimension 2 hat. In der Begründung steht jedoch sinngemäss einmal « $\dim(\operatorname{im} A) = 2$ »; für diese Ausschlussbegründung sollte es « $\dim(\ker A) = 2$ » heissen. Die freien Variablen und die Parameterdarstellung des Kerns könnten noch klarer ausgeschrieben werden.

Fehleranalyse: Für Aufgabe 5 ist $\dim(\ker A)$ entscheidend, nicht $\dim(\operatorname{im} A)$. Da es sich um eine 3×4 -Matrix mit Rang 2 handelt, gilt $\dim(\ker A) = 4 - 2 = 2$. Deshalb kann eine Basis des Kerns nicht aus drei Vektoren bestehen.

Aufgabe 6 – Basiswechsel und Darstellungsmatrix

Aufgabe 6a – Übergangsmatrix bestimmen

✓ korrekt

Du bildest die Matrix S aus den neuen Basisvektoren und invertierst sie mittels Gaußverfahren. Das sichtbare Resultat für $T = S^{-1}$ stimmt mit der Musterlösung überein. Der Zusammenhang $T = S^{-1}$ ist korrekt verwendet: S geht von den neuen Koordinaten zur Standardbasis, T in die umgekehrte Richtung.

Aufgabe 6b – Darstellungsmatrix in den neuen Koordinaten

✓ korrekt

Du verwendest die richtige Formel $B = TAT^{-1}$ (d.h. $B = TAT^{-1}$). Das Endresultat $\text{diag}(-1, -1, 0)$ ist korrekt. Die Rechnung ist kompakt, aber die wesentlichen Matrixprodukte und das Ergebnis sind sichtbar.

Aufgabe 6c – Geometrische Interpretation

✓ korrekt

Du interpretierst die Matrix in der neuen Basis richtig: die ersten beiden Basisvektoren werden mit Faktor -1 abgebildet, der dritte auf 0 . Die Beschreibung als Projektion auf die von b'_1 und b'_2 aufgespannte Ebene, gefolgt von einer Punktspiegelung, ist mathematisch korrekt. Sehr gut ist, dass du die geometrische Interpretation aus der Diagonalform $\text{diag}(-1, -1, 0)$ ableitest.

Aufgabe 7 – Fredholm-Alternative

Aufgabe 7 – Fredholm-Alternative

≈ weitgehend korrekt

Du formulierst die Fredholm-Alternative sinngemäss richtig: $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \perp \ker(A^T)$. Die Bestimmung einer Basis des Lösungsraums von $A^T y = 0$ ist sichtbar und führt zu den passenden Vektoren $c^{(1)} = (-3, 2, 1, 0)^T$ und $c^{(2)} = (-1, 0, 0, 1)^T$. Die Schlussfolgerung ist korrekt: Für b_1 ergibt sich Lösbarkeit, für b_2 nicht. Die Skalarproduktrechnungen sind teilweise sehr knapp notiert; für volle Nachvollziehbarkeit sollten die Werte – insbesondere der nichtverschwindende Wert bei b_2 – klar ausgeschrieben werden.

Fehleranalyse: Die mathematische Idee ist richtig, aber die Darstellung ist an einigen Stellen schwer lesbar. Gerade bei der Fredholm-Alternative ist die Schlussfolgerung nur dann überzeugend, wenn klar sichtbar ist, welche Skalarprodukte entstehen. Schreibe die zwei Orthogonalitätsprüfungen pro rechter Seite explizit hin: $\langle b_i, c^{(1)} \rangle$ und $\langle b_i, c^{(2)} \rangle$.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Projektion des vierdimensionalen Würfels

— nicht sichtbar

Zur Aufgabe 8 ist keine eigene Lösung sichtbar; es ist nur die Aufgabenstellung eingefügt. Daher können die Darstellungsmatrizen von P_1 , P_2 und E , die zusammengesetzten Matrizen sowie die Skizze der Kanten nicht bewertet werden. Für eine bearbeitete Lösung wäre wichtig, zuerst die Bilder der Standardbasisvektoren unter P_1 , P_2 und E zu bestimmen und daraus die Matrizen aufzubauen.

//

Insgesamt ist deine Abgabe fachlich stark bei den Aufgaben 1 bis 7. Du erkennst die zentralen Methoden der Serie: Dimensionsformel, Ähnlichkeit von Darstellungsmatrizen, Gaußverfahren für Bild und Kern, Basiswechsel sowie Fredholm-Alternative. Besonders positiv ist, dass du bei Aufgabe 6 die Diagonalform $\text{diag}(-1, -1, 0)$ in der neuen Basis korrekt berechnest und daraus eine sinnvolle geometrische Interpretation ableitest. Auch bei Aufgabe 7 ist die Hauptidee richtig umgesetzt. Verbessern kannst du vor allem die Lesbarkeit und Systematik der Begründungen. Bei Aufgaben mit freien Variablen solltest du die Parameterlösung vollständig ausschreiben, bevor du eine Basis angibst. Achte zudem darauf, Begriffe wie Bilddimension und Kerndimension nicht zu verwechseln, auch wenn das Endresultat korrekt ist. Aufgabe 8 fehlt sichtbar.