

//

- Aufgaben 1–6 mit Beweisen und Gegenbeispielen – korrekt.
- Aufgabe 7 vollständig korrekt; mehrere Notationsfragen werden beantwortet.
- Aufgabe 8a vollständig (alle drei Paare) – sehr gut!
- Aufgaben 8b und 9 nicht sichtbar.

Aufgaben 1–6 (Multiple Choice)

Aufgabe 1 – Betragsnorm auf $\mathbb{R}^2$

✓ korrekt

(b) *falsch*. ✓ Mit Gegenbeispiel zur Parallelogrammregel: $v = (1, 0)^\top$, $w = (0, 1)^\top \Rightarrow \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 8 \neq 4 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$. Sehr gut!

Aufgabe 2 – Skalarprodukt auf $\mathbb{R}$

✓ korrekt

(a) *richtig*. ✓ Alle drei Eigenschaften nachgewiesen.

Aufgabe 3 – Normungleichung

✓ korrekt

(a) *richtig*. ✓ (Anmerkung «Ich versteh die Aufgabe nicht» notiert – das Konzept ist aber korrekt beantwortet; die Begründung steht weiter oben im Dokument.)

Aufgabe 4 – L^1 -Konvergenz

✓ korrekt

(a) *richtig*. ✓ Mit Integralberechnung.

Aufgabe 5 – L^∞ -Konvergenz

✓ korrekt

(b) *falsch*. ✓ Mit Begründung: $\|f_n\|_{L^\infty} = f_n(0) = 1 \neq 0$.

Aufgabe 6 – Betrag als Norm

✓ korrekt

(a) *richtig*. ✓ Mit den drei Normeigenschaften.

//

Aufg. 6: «Was ist $|\cdot|$? Muss ich das nicht wissen? Wofür steht der Punkt?»

Die Schreibweise $|\cdot|$ ist ein *Platzhalter*: der Punkt steht für das Argument, das eingesetzt wird. Analog bedeutet $\|\cdot\|$ «eine Norm, die auf ein Element $\cdot$ angewendet wird». Konkret: $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $|x| := \max\{x, -x\}$ ist der gewöhnliche Betrag auf $\mathbb{R}$. Aufgabe 6 fragt: ist $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$? Antwort: *ja*.

Aufgabe 7 – Skalarprodukt mit Gewichtsmatrix

Aufgabe 7a – Nachweis Skalarprodukt

✓ korrekt

Sehr ausführlicher und vollständiger Beweis aller Axiome. ✓

Aufgabe 7b – Induzierte Norm

✓ korrekt

$$\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}. \checkmark$$

Aufgabe 7c – Normberechnung

✓ korrekt

$$\left\| \left(-\frac{1}{2}, 3\right)^\top \right\| = \sqrt{\frac{7}{2}}. \checkmark$$

//

« $\|\cdot\|$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$ – was heisst der Punkt?»

Alle drei Symbole verwenden Punkte als Platzhalter für die Argumente:

- $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist die Norm als Abbildung; $\|x\|$ ist ihr Wert bei x .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt; $\langle x, y \rangle$ ist sein Wert bei (x, y) .
- Die Frage «warum darf ich λ aus $\langle \lambda x, y \rangle$ herausziehen?» ergibt sich aus der Linearität des Matrizenprodukts: $(\lambda x)^\top D y = \lambda (x^\top D y)$.

Aufgabe 8 – Trigonometrische Orthogonalität**Aufgabe 8a – Alle drei Orthogonalitätspaare**

✓ korrekt

Alle drei Fälle vollständig und korrekt berechnet:

- Fall 1 ($\cos \cdot \cos$, $n \neq m$): $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)] dx = 0. \checkmark$
- Fall 2 ($\sin \cdot \sin$, $n \neq m$): $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0$ analog. ✓
- Fall 3 ($\cos \cdot \sin$): $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0$ für alle $n, m \geq 1. \checkmark$

Vollständigste 8a-Lösung aller Einreichungen!

Aufgabe 8b – Normierungskonstanten

— nicht sichtbar

Nicht sichtbar. Korrekte Antwort: $\alpha_n = \beta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ($n, m \geq 1$), $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.**Aufgabe 9****Aufgabe 9**

— nicht sichtbar

Nicht sichtbar.

//

Eine sehr engagierte Einreichung mit durchgehend kritischem Denken. Besonders hervorragend: Aufgabe 8a ist die vollständigste der gesamten Gruppe – alle drei Orthogonalitätspaare wurden korrekt und systematisch berechnet. Die Notationsfragen sind legitim und wichtig; der Punkt als Platzhalter ist eine fundamentale Konvention, die im gesamten Kurs verwendet wird. Aufgaben 8b und 9 fehlen – bitte nachholen.

//

- Aufgaben 1–6 vollständig und korrekt beantwortet.
- Aufgabe 7a: Symmetrie und positive Definitheit korrekt; Linearitätsbeweis unvollständig.
- Aufgaben 8 und 9 nicht eingereicht.
- Zwei Verständnisfragen (Aufg. 3 und 5) werden unten beantwortet.

Aufgaben 1–6 (Multiple Choice)

Aufgabe 1 – Betragsnorm auf $\mathbb{R}^2$

✓ korrekt

Richtige Antwort (b) *falsch*. Die Begründung sollte die Parallelogrammregel als Gegenbeispiel anführen. Für $v = (1, 0)^\top$, $w = (0, 1)^\top$:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 4 + 4 = 8 \neq 4 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Aufgabe 2 – Skalarprodukt auf $\mathbb{R}$

✓ korrekt

Richtige Antwort (a) *richtig*. Kein expliziter Beweis gezeigt; für die Prüfung wären Linearität, Symmetrie und positive Definitheit von $\langle a, b \rangle := ab$ formal nachzuweisen.

Aufgabe 3 – Normungleichung $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$

✓ korrekt

Richtige Antwort (a) *richtig*. Frage beantwortet – siehe Kasten unten.

//

Richtig, aber wieso?

Für $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$:

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$: Da $\max_i x_i^2 \leq \sum_i x_i^2$, folgt durch Wurzelziehen $\|x\|_\infty = \sqrt{\max_i x_i^2} \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} = \|x\|_2$.
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$: $\|x\|_1^2 = \left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j| \geq \sum_i x_i^2 = \|x\|_2^2$, also $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Aufgabe 4 – L^1 -Konvergenz

✓ korrekt

Richtige Antwort (a) *richtig*. Berechnung korrekt: $\|f_n\|_{L^1} = \frac{2}{n} \arctan(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Aufgabe 5 – L^∞ -Konvergenz

✓ korrekt

Richtige Antwort (b) *falsch*. Frage beantwortet – siehe Kasten unten.

//

Falsch, aber wieso?

$f_n(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher

$$\|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [-1,1]} f_n(x) \geq f_n(0) = 1 \neq 0.$$

Die Folge konvergiert in L^∞ nicht gegen die Nullfunktion.

Aufgabe 6 – Betrag als Norm

✓ korrekt

Richtige Antwort (a) richtig.

Aufgabe 7 – Skalarprodukt mit Gewichtsmatrix

Aufgabe 7a – Nachweis Skalarprodukt

≈ teilweise korrekt

Symmetrie und positive Definitheit korrekt nachgewiesen. Die Linearität wurde nur als «lineares Resultat» bezeichnet – kein algebraischer Nachweis. Vollständig:

- **Linearität:** $\langle x + y, z \rangle = (x + y)^\top D z = x^\top D z + y^\top D z = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$; $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda x^\top D y = \lambda \langle x, y \rangle$.
- **Symmetrie** ($D = D^\top$): $\langle x, y \rangle = x^\top D y = (x^\top D y)^\top = y^\top D^\top x = y^\top D x = \langle y, x \rangle$.
- **Positive Definitheit:** $\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 \geq 0$; $= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Aufgabe 7b – Induzierte Norm

✓ korrekt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top D x} = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}. \checkmark$$

Aufgabe 7c – Normberechnung

✓ korrekt

$$\left\| \left(-\frac{1}{2}, 3\right)^\top \right\| = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 9} = \sqrt{\frac{1}{2} + 3} = \sqrt{\frac{7}{2}}. \checkmark$$

Aufgaben 8 und 9

Aufgabe 8 – Trigonometrische Orthogonalität

— nicht sichtbar

Nicht eingereicht. Für die Prüfungsvorbereitung empfohlen: alle drei Paare (f_n, f_m) , (g_n, g_m) , (f_n, g_m) mit Produkt- zu-Summen-Formeln ausrechnen.

Aufgabe 9 – Parallelogrammregel und L^∞ -Norm

— nicht sichtbar

Nicht eingereicht.

//

Die Antworten zu Aufgaben 1–6 sind durchgehend korrekt. Sehr positiv: Die beiden Verständnisfragen zu Aufgaben 3 und 5 zeigen aktives Nachdenken – diese Haltung ist genau richtig. In Aufgabe 7a fehlt der formale Linearitätsnachweis; ein «lineares Resultat» reicht als Beweis nicht aus. Aufgaben 8 und 9 sind nicht eingereicht; beide Themen (trigonometrische Orthogonalität, Parallelogrammregel, Gram-Schmidt) sind prüfungsrelevant und sollten nachgeholt werden.

Feedback – Hausaufgabenserie 3

Lineare Algebra II · D-MAVT · FS 2026

Prof. Dr. N. Hungerbühler

//

- Aufgaben 1–3 korrekt; Aufg. 4 und 5 nicht beantwortet; Aufg. 6 falsch.
- Aufgabe 7a: Symmetriebeweis unvollständig; 7b und 7c korrekt.
- Aufgabe 8a: grundlegend falsche Integrationsmethode.
- Aufgaben 8b und 9 nicht sichtbar.

Aufgaben 1–6 (Multiple Choice)

Aufgaben 1–3

✓ korrekt

(b), (a), (a) – alle korrekt. ✓

Aufgaben 4 und 5

— nicht sichtbar

Keine Antwort sichtbar.

Aufgabe 6 – Betrag als Norm

× nicht korrekt

(b) *falsch* gewählt – **falsch!** Die korrekte Antwort ist (a) *richtig*.

Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}$:

- Definitheit: $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. ✓
- Homogenität: $|\lambda x| = |\lambda||x|$. ✓
- Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$. ✓

Aufgabe 7 – Skalarprodukt mit Gewichtsmatrix

Aufgabe 7a – Nachweis Skalarprodukt

≈ teilweise korrekt

Linearität und positive Definitheit korrekt. Der Symmetriebeweis ist unvollständig: $\langle x, y \rangle = x^\top D y$ und $\langle y, x \rangle = y^\top D x$ wurden hingeschrieben, aber nicht gezeigt, dass sie gleich sind.

Fehlender Schritt: Da $D = D^\top$,

$$\langle x, y \rangle = x^\top D y = (x^\top D y)^\top = y^\top D^\top x = y^\top D x = \langle y, x \rangle. \quad \checkmark$$

Aufgabe 7b – Induzierte Norm

✓ korrekt

$$\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}. \quad \checkmark$$

Aufgabe 7c – Normberechnung

✓ korrekt

$$\left\| \left(-\frac{1}{2}, 3\right)^\top \right\| = \sqrt{\frac{7}{2}} \approx \sqrt{3.5}. \quad \checkmark$$

Aufgabe 8 – Trigonometrische Orthogonalität

Aufgabe 8a – Orthogonalitätsnachweis

× nicht korrekt

Die Methode ist fundamental falsch: das Produktintegral wurde additiv aufgespalten:

$$\int_0^{2\pi} \alpha \cos(x) \cdot \beta \sin(x) dx \stackrel{!}{=} \int_0^{2\pi} \alpha \cos(x) dx + \int_0^{2\pi} \beta \sin(x) dx$$

Das ist **falsch** – die Linearität des Integrals gilt nur für Summen, nicht für Produkte.

Korrekte Methode (Produkt-zu-Summen-Formel):

$$\langle f_n, g_m \rangle = \alpha_n \beta_m \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = \frac{\alpha_n \beta_m}{2} \int_0^{2\pi} [\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)] dx = 0.$$

Aufgabe 8b

— nicht sichtbar

Nicht sichtbar.

Aufgabe 9

Aufgabe 9

— nicht sichtbar

Nicht sichtbar.

//

Aufgaben 1–3 sind korrekt. Aufgabe 6 ist falsch – der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}$ (alle drei Axiome erfüllt), die korrekte Antwort ist (a) *richtig*. In Aufgabe 7a fehlt der entscheidende Schlussschritt beim Symmetriebeweis: aus $D = D^\top$ muss explizit gefolgert werden, dass $x^\top Dy = y^\top Dx$. In Aufgabe 8a liegt ein grundlegender Fehler vor: ein Produktintegral kann nicht additiv in Einzelintegrale aufgespalten werden. Die korrekte Methode sind Produkt-zu-Summen-Formeln ($\cos \cdot \sin = \frac{1}{2}[\sin(\cdot + \cdot) + \sin(\cdot - \cdot)]$). Aufgaben 4, 5, 8b und 9 fehlen vollständig.